COMBINED MATHEMATICS

ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යයන්

01

2021 Revision

Ruwan Darshana
B.Sc. (Hons)

A

■ පහත සර්වසාම්‍යයන් ඔප්පු කරන්න.

01. $\sin\theta \cot\theta \sec\theta \equiv 1$

02. $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta + 2\cot\theta \tan\theta + 3\sec\theta \cos\theta \equiv 6$

03. $\sin\theta \,.\, \tan\theta + \cos\theta \equiv \sec\theta$

04. $\dfrac{\tan\theta + \cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta \;\sec\theta} \equiv 1$

■ පහත සර්වසාම්‍යයන් සාධනය කරන්න.

05. $\sin^3\theta - \cos^3\theta \equiv (\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)$

06. $\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta \equiv \sin\theta$

07. $\cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta \equiv \cos^3\theta$

08. $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 \equiv 2$

09. $\cos^4 A - \sin^4 A \equiv 2\cos^2 A - 1$

10. $\cos^4 A - \sin^4 A \equiv 1 - 2\sin^2 A$

11. $\sin^4\theta + \cos^4\theta \equiv 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

12. $\sin^6\theta + \cos^6\theta \equiv 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

13. $\dfrac{\sin\theta}{(1 + \cos\theta)} + \dfrac{(1 + \cos\theta)}{\sin\theta} \equiv 2\operatorname{cosec}\theta$

14. $\dfrac{1}{(1 + \cos\theta)} + \dfrac{1}{(1 - \cos\theta)} = 2\operatorname{cosec}^2\theta$

15. $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} \equiv \sec\theta - \tan\theta$

16. $\sin^8 A - \cos^8 A \equiv (\sin^2 A - \cos^2 A)(1 - 2\sin^2 A\cos^2 A)$

17. $\left[\dfrac{1}{\sec^2 A - \cos^2 A} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A - \sin^2 A}\right]\cos^2 A\sin^2 A \equiv \dfrac{1 - \cos^2 A\;\sin^2 A}{2\cos^2 A\sin^2 A}$

B

■ පහත සර්වසාම්‍යයන් සාධනය කරන්න.

18. $\sec^4 A - \sec^2 A = \tan^4 A + \tan^2 A$

19. $(\sec A + \cos A)(\sec A - \cos A) = \tan^2 A + \sin^2 A$

20. $[\sqrt{\sec\theta + \tan\theta} - \sqrt{\sec\theta - \tan\theta}]^2 = 2\sec\theta - 2$

21. $\mathrm{cosec}^4\theta - \cot^4\theta \equiv 1 + 2\cot^2\theta$

22. $[\sqrt{\mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta} + \sqrt{\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta}]^2 = 2(\mathrm{cosec}\,\theta + 1)$

23. $\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} \equiv 1 - 2\sec A\tan A + 2\tan^2 A$

24. $\dfrac{\sec^2\theta - 6\tan\theta + 7}{\sec^2\theta - 5} = \dfrac{\tan\theta - 4}{\tan\theta + 2}$

25. $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \tan^2\theta}{\sec\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

26. $(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A) = \dfrac{\sec A}{\mathrm{cosec}^2 A} - \dfrac{\mathrm{cosec}\,A}{\sec^2 A}$

27. $\dfrac{\sec^2\theta - 6\tan\theta + 7}{\sec^2\theta - 5} = \dfrac{\tan\theta - 4}{\tan\theta + 2}$

28. $\mathrm{cosec}^4\theta - \cot^4\theta \equiv 1 + 2\cot^2\theta$

■ පහත සර්වසාම්‍යයන් සාධනය කරන්න.

29. $(\sin\theta + \mathrm{cosec}\,\theta)^2 + (\cos\theta + \sec\theta)^2 \equiv \tan^2\theta + \cot^2\theta + 7$

30. $(\tan\alpha + \mathrm{cosec}\,\beta)^2 + (\cot\beta - \sec\alpha)^2 \equiv 2\tan\alpha\cot\beta(\mathrm{cosec}\,\alpha + \sec\beta)$

31. $\dfrac{1}{\mathrm{cosec}\,A - \cot A} - \dfrac{1}{\sin A} \equiv \dfrac{1}{\sin A} - \dfrac{1}{(\mathrm{cosec}\,A + \cot A)}$

32. $\sec^6 A - \tan^6 A \equiv 1 + 3\tan^2 A + \tan^4 A$

33. $\sec^2 A\,\mathrm{cosec}^2 A \equiv \tan^2 A + \cot^2 A + 2$

34. $\dfrac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} \equiv \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos A}$

35. $\dfrac{1 + \sin\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta\cos\theta}$

C

36. $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{-12}{13}$ වේ. ($\frac{\pi}{2} < A < \pi$) ($\pi < B < \frac{3\pi}{2}$) නම්,

$\cos A$, $\tan A$, $\sin B$, $\tan B$ සොයන්න.

37. $\sin \theta = \frac{12}{13}$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$ $(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2})$ $\sin(\theta + \alpha)$ සොයන්න.

38. $3 \tan A - 4 = 0$ වන පරිදි, A, 3 වන වෘත්ත පදයේ පිහිටයි. $5 \sin 2A + 3 \sin A + 4$ හි අගය සොයන්න.

39. θ පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටයි. $5 \tan \theta = 4$ නම්, $\frac{5 \sin \theta - 3 \cos \theta}{\sin \theta + 2 \cos \theta}$ අගය සොයන්න.

40. $\sec A = \sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ නම්,

(i) $\frac{1 + \tan A + \operatorname{cosec} A}{1 + \cos A - \operatorname{cosec} A}$ (ii) $\sin 2A$ (iii) $\cos 3A$ සොයන්න.

D

41. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \cot \beta - \cot \alpha$

42. $\cos(A + 45^0) + \sin(A - 45^0) = 0$

43. $\frac{\sin(A - B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B - C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C - A)}{\cos C \cos A} = 0$

44. $\cos(30^0 + A)\cos(30^0 - A) - \sin(30^0 + A)\sin(30^0 - A) = \frac{1}{2}$

45. $\cos(A - 45^0) - \sin(A + 45^0) = 0$

46. $\cos(\alpha + \beta)\cos \gamma - \cos(\beta + \gamma)\cos \alpha = \sin \beta \sin(\gamma - \alpha)$

47. $\frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta)\tan \beta} = \tan \alpha$

E

48. $\sin A = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ හා $\cos B = -\frac{40}{41}$, $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ ද නම් $\sin(A-B)$ හා $\cos(A+B)$ හි අගය ලබාගන්න.

49. $\tan A = -\frac{5}{12}$, $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$ හා $\tan B = \frac{7}{24}$, $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ ද නම් $\sin(A+B)$ හා $\sin(A-B)$ සොයන්න.

50. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ සොයන්න.

51. $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\tan 75^0$, $\cos 105^0$ සොයන්න.

F

52. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

53. $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan 2A$

54. $\cos ec\ 2A + \cot 2A = \cot A$

55. $\tan A + \cot A = 2 \cos ec\ 2A$

56. $\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta$

57. $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

58. $1+\cos^2 2\theta = 2(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$

59. $\sec^2 A\,(1+\sec 2A) = 2\sec 2A$

60. $\cot A = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)$

G

61. $\sin 8A = 8\sin A\ \cos A\ \cos 2A\ \cos 4A$

62. $\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$

63. $\cos 4A = 8\sin^4 A - 8\sin^2 A + 1$

64. $1+\cos^2 2A = 2\,[\cos^4 A + \sin^4 A]$

65. $8\,[\cos^6\theta + \sin^6\theta] = 5 + 3\cos 4\theta$

66. $\frac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A}$

67. $\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)} = \tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$

68. $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$

H

69. $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} - \dfrac{\cos 3A}{\cos A} = 2$

70. $\dfrac{3\cos A + \cos 3A}{3\sin A - \sin 3A} = \cot^3 A$

71. $4\sin^3 A\cos 3A + 4\cos^3 A\sin 3A = 3\sin 4A$

72. $\cos 3\theta \equiv \cos\theta\,[2\cos 2\theta - 1]$

72. $\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$

73. $\cos 6\theta = 1 - 18\sin^2\theta + 48\sin^4\theta - 32\sin^6\theta$

74. $\cos 4\theta - \cos 3\theta = 8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1$

75. $\sin^3 2\theta\cos 6\theta + \cos^3 2\theta\sin 6\theta = \dfrac{3}{4}\sin 3\theta$

I

76. $\dfrac{\sin 7\theta - \sin 5\theta}{\cos 7\theta + \cos 5\theta} = \tan\theta$

77. $\dfrac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan 2A$

78. $\dfrac{\sin A - \sin 2A}{\cos A + \cos 2A} = -\tan\dfrac{A}{2}$

79. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan\left[\dfrac{(A+B)}{2}\right]$

80. $\dfrac{\sin 7A - \sin A}{\sin 8A - \sin 2A} = \cos 4A\sec 5A$

81. $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 12\alpha}{\sin 12\alpha + \sin 2\alpha} = \tan 5\alpha$

82. $\cos 3A + \cos 5A + \cos 7A + \cos 15A = 4\cos 4A\cos 5A\cos 6A$

83. $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 5\theta = \cos 2\theta\,(1 + 2\cos 3\theta)$

84. $\dfrac{\cos 3\theta + 2\cos 5\theta + \cos 7\theta}{\cos\theta + 2\cos 3\theta + \cos 5\theta} = \cos 2\theta - \sin 2\theta\tan 3\theta$

85. $\dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} = \tan 3\theta$

86. $\dfrac{\sin A + 2\sin 3A + \sin 5A}{\sin A + 2\sin 5A + \sin 7A} = \dfrac{\sin A}{\sin 5A}$

87. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

88. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

J

89. $2\sin\theta = x$, $3\cos\theta = y$

90. $x = 4\sec\theta$
$y = 5\tan\theta$

91. $x = a\sec\theta$
$y = b\,\mathrm{cos\,ec}\,\theta$

92. $x = b\,\mathrm{cos\,ec}\,\theta$
$y = b\cot\theta$

93. $x = 2\tan\theta$
$y = 3\cos\theta$

94. $a = 2\cos\theta + 3\sin\theta$
$b = 3\cos\theta + 2\sin\theta$

95. $a = 2\tan\theta + \cot\theta$
$b = \sec^2\theta + \mathrm{cos\,ec}^2\,\theta$

96. $a = 2\tan\theta + \sec\theta$
$b = \sec\theta + \tan\theta$

97. $a = 1 + \sin\theta + \cos\theta$
$b = 2 - \sin\theta\cos\theta$

98. $a = \cos\theta - \sin\theta$
$b = 1 - \sin\theta\cos\theta$

99. $d = a\sec\theta - c\tan\theta$
$c = \sec\theta + d\tan\theta$

100. $c = a\cos\theta + b\sin\theta$
$d = b\cos\theta - a\sin\theta$

101. $\sec\theta - \cos\theta = a$ හා $\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta = b$ නම් $a^2 b^2 (a^2 + b^2 + 3) = 1$ බව පෙන්වන්න.

102. $\tan\theta + \sin\theta = p$ හා $\tan\theta - \sin\theta = q$ නම් $(p^2 - q^2)^2 = 16pq$ බව පෙන්වන්න.

103. $x\cos\theta + y\sin\theta = a$ හා $x\sin\theta - y\cos\theta = b$ නම් $\tan\theta = \dfrac{ay + bx}{ax - by}$ හා $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ බව පෙන්වන්න.

104. $x = \sin\theta + \cos\theta$ හා $y = \tan\theta + \cot\theta$ නම් $y(x^2 - 1) = 2$ බව පෙන්වන්න.

105. $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ නම් $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

106. $\sin 3\theta = a$, $\sin^2\theta = \dfrac{3}{4} - b$ නම් $a^2 = 4b^2(3 - 4b)$ බව පෙන්වන්න.

107. $\sin\theta + \cos\theta = a$, $\sin\theta - \cos\theta = b$
$\sec\theta + \tan\theta = a$, $\sec\theta - \tan\theta = b$

පසුගිය විභාග ගැටළු

108. $\cos 3\theta \equiv \cos\theta\ (2\cos 2\theta - 1)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\alpha = \dfrac{2\pi}{41}$ විට, $(2\cos 11\alpha - 1)$ $(2\cos 17\alpha - 1)\ (2\cos 31\alpha - 1)\ (2\cos 33\alpha - 1) = 1$ බව පෙන්වන්න. *[1999]*

109. ඕනෑම x තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා, $\sin^3 2x \cos 6x + \cos^3 2x \sin 6x = \dfrac{3}{4}\sin 8x$ බව පෙන්වන්න.

$\sin^3 2x \cos 6x + \cos^3 2x \sin 6x = a$ සමීකරණ විසඳිය හැකි a අගයයන් අපෝහනය කරන්න. *[2001]*

110. (i) θ යනු $\dfrac{\pi}{2}$ හි ගුණාකාරයට සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් විට,

$x = \sin\theta - \cos\theta$ සහ $y = \tan\theta + \cot\theta$ නම්, $\sin 2\theta$

I. x ඇසුරෙන් පමණක්,

II. y ඇසුරෙන් පමණක්, ලබාගන්න.

ඒනයින් x සහ y අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබාගන්න.

(ii) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = (1 + 2\cos 2x)\sin 4x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\sin x\,(\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x) = \sin 3x \sin 4x$ බව පෙන්වන්න.

$\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න. *[2003]*

111. $\sin(A - B)$ හා $\cos(A - B)$ හි ප්‍රසාරණ උපයෝගී කර ගනිමින්, $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ හා $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ බව පෙන්වන්න. $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $\tan x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ බව පෙන්වා $\tan\dfrac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව අපෝහනය කරන්න. *[2004]*

112. I. සෑම θ සඳහාම $8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = \cos 4\theta - \cos 3\theta$ බවත්

II. 7θ යන්න 2π හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නම්, $\cos 4\theta = \cos 3\theta$ බවත් පෙන්වන්න.

$\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \dfrac{6\pi}{7}\cos = -\dfrac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න. *[2005]*

113. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,
$\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + \mathrm{b}\cos 4\theta$ වන අයුරින් a හා b යන තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.
ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

(i) $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2}\sin 4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න. *[2011]*

114. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ යයි ගනිමින් $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. $\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right)$ හි අගය අපෝහනය කරන්න. *[2012]*

115. (i) $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ හා $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ නම්, $\sin 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ හා $\tan 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\lambda - \cos(\alpha+\beta+\lambda) \equiv 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\lambda)$ $\sin\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)$ සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න. *[2013]*

116. $\tan\alpha = -1$ හා $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ හා $\frac{\pi}{2} < \beta < 2\pi$ වේ. $\cos(\alpha+\beta)$ හි අගය සොයන්න. *[2014]*

117. (i) $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ හා $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$ යැයි ගනිමු. මෙහි α හා β සුළු කෝණ වේ. $\alpha+\beta$ හි අගය සොයන්න.

(ii) $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta = 1$ බව පෙන්වන්න. *[2015]*